Tretji izpit iz Algebre 2
Ljubljana, 25. avgust 2005

1. Naj bo G grupa, H njena podgrupa in N podgrupa edinka grupe G. Recimo, da se lahko vsak $a \in G$ enolično zapiše v obliki $a = hn$ pri nekih $h \in H$ in $n \in N$. Pokaži, da obstajata tak surjektivni homomorfizem $\alpha : G \to H$ z jedrom N in tak homomorfizem $\beta : H \to G$, da je $\alpha \circ \beta = id_H$.

2. Naj bosta $k \subset K$ obsega in $f(x), g(x) \in k[x]$. Pokaži, da veljata naslednji trditvi.
   (a) Če $f(x)$ deli $g(x)$ v $K[x]$, potem $f(x)$ deli $g(x)$ tudi v $k[x]$.
   (b) Največja skupna delitelja polinomov $f(x)$ in $g(x)$ v kolobarjih $k[x]$ in $K[x]$ sta enaka.

3. Ali je $\mathbb{Q}$ projektivni modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}$?

4. Naj bo k obseg moči p^n. Pokaži, da za vsak $a \in k$ obstaja tak $b \in k$, da je $a = b^p$.