Izpit iz Algebre 2
30. 8. 2012

1. Naj bo G grupa in H neka ciklična podgrupa edinka grupe G. Pokaži, da je vsaka podgrupa $K \leq H$ podgrupa edinka v G. Ali to še velja, če H ni ciklična?

2. Koliko podgrup ima grupa $\mathbb{Z}_{2000}$? Odgovor utemelji.

3. Naj bo K kolobar z enico. Označimo z $Z(K)$ center kolobarja K, to je

$$Z(K) = \{x \in K \mid xy = yx \text{ za vsak } y \in K\}.$$

   (a) Pokaži, da je $Z(K)$ podkolobar kolobarja K.

   (b) Kolobar se imenuje *enostaven*, če ne vsebuje pravega netrivialnega dvostranskega ideala. Pokaži: če je K enostaven, je $Z(K)$ podobseg v K.

4. Poišči vse vrednosti a v kolobarju $\mathbb{Z}_3$, za katere je $\mathbb{Z}_3[X]/(X^3 + X^2 + aX + 1)$ obseg.

5. Naj bo K kolobar zgornje trikotnih matrik $K = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Pokaži, da so obrnljivi elementi v K točno vse matrike $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$, kjer $x, z \neq 0$.

   (b) Ideal I kolobarja K se imenuje *maksimalen*, če je $I \neq K$ in če ne obstaja dvostranski ideal $I \subsetneq I' \subsetneq K$. Pokaži, da sta $I_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ in $I_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ maksimalna ideala kolobarja K.