Izpit iz Algebre 2

30. 8. 2012

1. Naj bo G grupa in H neka ciklična podgrupa edinka grupe G. Pokaži, da je vsaka podgrupa $K \leq H$ podgrupa edinka v G. Ali to še velja, če H ni ciklična?

   Rešitev: Naj bo $a \in H$ generator grupe H. Podgrupa ciklične grupe je ciklična, torej je $K = \langle a^n \rangle$ za nek $n \in \mathbb{Z}$. Izberimo poljuben $x \in K$ in $g \in G$. Preveriti moramo, da je $gxg^{-1} \in K$. Pišimo $x = a^{nk}$ za nek k. Ker je $gag^{-1} \in H$, je $gag^{-1} = a^l$ za nek l, torej $gxg^{-1} = ga^{kn}g^{-1} = (gag^{-1})^{kn} = a^{kln} \in K$.

   Če H ni ciklična, to ne velja. Npr., $G = S_3$, $H = G$ in $K = \langle (1\ 2) \rangle$.

2. Koliko podgrup ima grupa $\mathbb{Z}_{2000}$? Odgovor utemelji.

   Rešitev: Število $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ ima 20 deliteljev (števila $2^i \cdot 5^j$ za $i \leq 4$ in $j \leq 3$). Za vsak delitelj d števila 2000 je $\langle d \rangle = d\mathbb{Z}_{2000}$ podgrupa moči $2000/d$ (saj je $2000/d$ red elementa d tej grupi). Torej imamo 20 podgrup različnih moči.

   Te grupe so tudi vse podgrupe. Res, naj bo H poljubna podgrupa grupe $\mathbb{Z}_{2000}$. Označimo z n generator grupe H. Potem je H točno množica vseh $n\alpha + 2000\beta$ po modulu 2000, kjer α in β pretečeta cela števila. Števila $n\alpha + 2000\beta$ pa so točno večkratniki največjega skupnega delitelja $d = d(n, 2000)$. Torej je $H = \langle d \rangle$, kjer je d nek delitelj števila 2000, in je zato H ena od zgoraj naštetih 20 grup.

3. Naj bo K kolobar z enico. Označimo z $Z(K)$ center kolobarja K, to je

   $$Z(K) = \{x \in K |\ xy = yx \text{ za vsak } y \in K\}.$$

   (a) Pokaži, da je $Z(K)$ podkolobar kolobarja K.

   (b) Kolobar se imenuje *enostaven*, če ne vsebuje pravega netrivialnega dvostranskega ideala. Pokaži: če je K enostaven, je $Z(K)$ podobseg v K.

   Rešitev:

   (a) Izberimo $x, y \in Z(K)$ in $z \in K$. Potem je $z(x-y) = zx - zy = xz - yz = (x-y)z$ in $z(xy) = zxy = (xy)z$, torej $x - y, xy \in Z(K)$. Torej je $Z(K)$ podkolobar.

   (b) Najprej vidimo, da $Z(K)$ očitno vsebuje enico kolobarja K. Izberimo $x \in Z(K)$, $x \neq 0$. Potem je $(x) = Kx$ neničeln dvostranski ideal kolobarja K. Ker je K enostaven, je potem $Kx = K$. Torej obstaja $y \in K$, da je $yx = 1$. Ker je x v centru, je tudi $xy = 1$, torej je x obrnljiv v K. Preverimo še, da je $x^{-1} \in Z(K)$: Naj bo $z \in K$ poljuben. Potem je $xz = zx$. Če množimo to enačbo z leve in desne z x^{-1}, dobimo $zx^{-1} = x^{-1}z$. Torej je res $x^{-1} \in Z(K)$ in je x obrnljiv v $Z(K)$. Ker je bil $x \neq 0$ poljuben, je torej $Z(K)$ obseg.

4. Poišči vse vrednosti a v kolobarju $\mathbb{Z}_3$, za katere je $\mathbb{Z}_3[X]/(X^3 + X^2 + aX + 1)$ obseg.

   Rešitev: Ta kolobar bo obseg natanko tedaj, ko bo $(X^3 + X^2 + aX + 1)$ maksimalni ideal, ali ekvivalentno, praideal, to pa bo natanko tedaj, ko bo polinom $p(X) = X^3 + X^2 + aX + 1$ nerazcepen. To pa bo natanko tedaj, ko ne bo imel ničle v $\mathbb{Z}_3$. (Če bi imel ničlo, bi bil očitno razcepen, in obratno, če bi bil razcepen, tedaj bi bil deljiv s polinomom stopnje 1 in bi zato imel ničlo.) Izračunamo $p(0) = 1$, $p(1) = a$ in $p(2) = 1 - a$. Torej mora biti $a \neq 0$ in $a \neq 1$. Edina možnost je $a = 2$.

5. Naj bo K kolobar zgornje trikotnih matrik $K = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(a) Pokaži, da so obrnljivi elementi v K točno vse matrike $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$, kjer $x, z \neq 0$.

(b) Ideal I kolobarja K se imenuje *maksimalen*, če je $I \neq K$ in če ne obstaja dvostranski ideal $I \subsetneq I' \subsetneq K$. Pokaži, da sta $I_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ in $I_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ maksimalna ideala kolobarja K.

Rešitev:

(a) Vsaka matrika $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$, kjer $x, z \neq 0$, je obrnljiva v K, saj ima inverz $\frac{1}{xz}\left(\begin{smallmatrix} z & -y \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \in K$. Obratno, če je $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ obrnljiva v K, je obrnljiva v $M_2(\mathbb{R})$ in zato $\det(A) = xz \neq 0$, torej $x, z \neq 0$.

(b) Najprej vidimo, da je I_1 očitno zaprt za seštevanje. Velja tudi $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I_1$ in $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \in I_1$ za poljubne $u, v, x, y, z \in \mathbb{R}$, torej je I_1 ideal v K. Podobno vidimo, da je tudi I_2 ideal.

Preverimo še maksimalnost. Naj bo $I_1 \subsetneq I$ za nek ideal I. Izberimo $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \in I \backslash I_1$. Torej je $z \neq 0$. Ker je $\left(\begin{smallmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in I_1 \subseteq I$, je potem $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) \in I$. Ta matrika pa je obrnljiva. Torej I vsebuje obrnljiv element in zato $I = K$. Torej je I_1 maksimalni ideal. Podobno preverimo, da je tudi I_2 maksimalni ideal.