Izpit iz Algebre 2, 14. 2. 2012

1. Pokaži, da ne obstaja neničelni homomorfizem grup $(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$.

2. Koliko podgrup moči 5 ima grupa S_5?

3. Naj bo G končna grupa, katere moč je deljiva s praštevilom p, in A neka podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(G)$ moči $|A| = p^k$ za neko naravno število k. Pokaži, da obstaja tak $x \in G$, $x \neq 1$, da je $f(x) = x$ za vsak $f \in A$. (Nasvet: oglej si naravno delovanje grupe A na množici G.)

4. Pokaži, da je kolobar $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ izomorfen kolobarju matrik $K = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right],\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

5. Naj bo K komutativen kolobar z enico in P njegov praideal. Pokaži: če P ne vsebuje netrivialnih deliteljev niča kolobarja K, potem je K cel kolobar.