Izpit iz Algebre 2, 14. 2. 2012 – Rešitve

1. Pokaži, da ne obstaja neničelni homomorfizem grup $(\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$.

   Rešitev: Naj bo $f : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$ poljuben homomorfizem in $q \in \mathbb{Q}$. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f(q) = f(n \cdot \frac{q}{n}) = f(\frac{q}{n} + \ldots + \frac{q}{n}) = f(\frac{q}{n}) + \ldots + f(\frac{q}{n}) = nf(\frac{q}{n}) \in n\mathbb{Z}$. Torej je $f(q)$ deljivo z n za vsak n in zato $f(q) = 0$. Ker je bil q poljuben, je potem $f = 0$.

2. Koliko podgrup moči 5 ima grupa S_5?

   Rešitev: Grupa S_5 ima $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ elementov, torej so podgrupe moči 5 ravno 5-podgrupe Sylowa. Z izreki Sylowa pokažemo, da je teh podgrup natanko 6 ali 1. Če bi bila 1, bi bila to podgrupa edinka. Ogledamo si kakšno podgrupo moči 5, na primer $H = \langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\rangle = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 5\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 5\ 3), (1\ 5\ 4\ 3\ 2), \mathrm{id}\}$; ta ni podgrupa edinka, saj $(1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2)^{-1} = (1\ 3\ 4\ 5\ 2) \notin H$. Torej je podgrup moči 5 natanko 6.

3. Naj bo G končna grupa, katere moč je deljiva s praštevilom p, in A neka podgrupa grupe $\mathrm{Aut}(G)$ moči $|A| = p^k$ za neko naravno število k. Pokaži, da obstaja tak $x \in G$, $x \neq 1$, da je $f(x) = x$ za vsak $f \in A$. (Nasvet: oglej si naravno delovanje grupe A na množici G.)

   Rešitev: Grupa A deluje na množici G kot naravna vložitev $\varphi : A \hookrightarrow S(G)$, $\varphi(f) = f$. Če je $x \in G$ točka iz G, potem označimo z $\overline{x}$ njeno orbito in z A_x stabilizator. Ker je $|\overline{x}| = [A : A_x]$, je moč vsake orbite delitelj moči grupe A in zato bodisi $|\overline{x}| = 1$ (točka x je fiksna točka delovanja) bodisi $p||\overline{x}|$. Množica G pa je disjunktna unija orbit nefiksnih točk (te orbite imajo po pravkar dokazanem moč, deljivo s p) in množice fiksnih točk. Ker je moč G deljiva s p, je potem tudi število fiksnih točk deljivo s p in zato večje ali enako p (točka 1 je seveda fiksna točka delovanja). Posebej to pomeni, da obstaja vsaj ena netrivialna fiksna točka delovanja, to je točka $x \in G$, za katero je $f(x) = x$ za vsak $f \in A$.

4. Pokaži, da je kolobar $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ izomorfen kolobarju matrik $K = \{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right],\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

   Rešitev: Definiramo preslikavo $f : \mathbb{R}[X] \to K$, $p_0 + p_1X + \ldots + p_nX^n \mapsto \left[\begin{smallmatrix} p_0 & p_1 \\ 0 & p_0 \end{smallmatrix}\right]$. Preverimo lahko, da je f homomorfizem kolobarjev. Očitno je f surjektiven in $\ker(f) = (X^2)$, torej je po izreku o izomorfizmih $\mathbb{R}[X]/(X^2) \cong K$.

5. Naj bo K komutativen kolobar z enico in P njegov praideal. Pokaži: če P ne vsebuje netrivialnih deliteljev niča kolobarja K, potem je K cel kolobar.

   Rešitev: Denimo nasprotno, da je $xy = 0$ za neka $x, y \in K$, $x, y \neq 0$. Ker je P praideal in $xy = 0 \in P$, je $x \in P$ ali $y \in P$. To pa je protislovje s predpostavko, da P ne vsebuje netrivialnih deliteljev niča kolobarja K.