Algebra 2, 1. izpit

5. februar 2014

1. naloga (25 točk)

Katere od spodnjih množic realnih funkcij tvorijo grupo glede na operacijo običajnega množenja funkcij po komponentah?

a) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \forall x\in\mathbb{R}.\ f(x)>0\}$

b) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}.\ f(x)=0\}$

c) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \exists x\in\mathbb{R}.\ f(x)<0\}$

Katere od spodnjih množic realnih funkcij tvorijo kolobar glede na operaciji običajnega seštevanja in množenja funkcij po komponentah?

d) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \forall n\in\mathbb{N}.\ f(n)\in\mathbb{Q}\}$

e) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \exists n\in\mathbb{N}.\ f(n)\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$

f) $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \exists \lim_{n\to\infty} f(n)\}$

2. naloga (25 točk)

Opazujva ciklično grupo $\mathbb{Z}_{12}$ glede na operacijo seštevanja.

a) Nariši Cayleyjev graf $\mathscr{G}$ grupe $\mathbb{Z}_{12}$ glede na podmnožico $\{\bar{4},\bar{9}\}$.

b) Poišči 2-podgrupo Sylowa P_2 in 3-podgrupo Sylowa P_3 grupe $\mathbb{Z}_{12}$. Na grafu $\mathscr{G}$ označi elemente množic P_2 in P_3.

c) Pokaži, da lahko vsak element grupe $\mathbb{Z}_{12}$ enolično zapišemo v obliki p_2+p_3 za neka $p_2\in\mathsf{P}_2, p_3\in\mathsf{P}_3$.

d) Eksplicitno podaj izomorfizem grup $\mathbb{Z}_{12}$ in $\mathsf{P}_2\oplus\mathsf{P}_3$.

3. naloga (25)

Opazujva podkolobar kompleksnih števil $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]=\{a+b\sqrt{2}i\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Za število $z=a+b\sqrt{2}i$ označiva $N(z)=a^2+2b^2$.

a) Pokaži, da za poljubni števili $z,w\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ velja $N(zw)=N(z)N(w)$.

b) Pokaži, da je $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ glavni kolobar.

c) Poišči obrnljive elemente v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Katero znano grupo tvorijo za operacijo množenja?

d) Element $4+\sqrt{2}i$ razcepi na nerazcepne elemente v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

e) Pokaži, da podkolobar $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]=\{a+b\sqrt{8}i\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ kolobarja $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ *ni* kolobar z enolično faktorizacijo.

4. naloga (25 + 7 točk)

Opazujva množico $\mathscr{F}=\{f:\mathfrak{Q}_8\to\mathbb{Z}\}$ vseh funkcij iz kvaternionske grupe $\mathfrak{Q}_8$ v kolobar celih števil $\mathbb{Z}$.

Množico $\mathscr{F}$ opremiva z operacijo $\oplus$ seštevanja funkcij po točkah in z operacijo $\otimes$ konvolutivnega množenja funkcij. Torej $(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$ in $(f\otimes g)(x)=\sum_{y\in\mathfrak{Q}_8} f(y)g(y^{-1}x)$ za $f,g\in\mathscr{F}$.

a) Pokaži, da je $(\mathscr{F},\oplus,\otimes)$ kolobar z enoto.

b) Pokaži, da množica konstantnih funkcij tvori ideal v $\mathscr{F}$.

Za vsak element $x\in\mathfrak{Q}_8$ opazujva funkcijo $f_x\in\mathscr{F}$, definirano s predpisom $f_x: x\mapsto 1$ in $f_x: y\mapsto 0$ za vse $y\neq x$.

c) Pokaži, da je element f_k obrnljiv v $\mathscr{F}$ in poišči njegov red v grupi obrnljivih elementov kolobarja $\mathscr{F}$.

d) Pokaži, je preslikava $\iota:\mathfrak{Q}_8\to\mathscr{F}$, definirana s predpisom $\iota: x\mapsto f_x$, injektivni homomorfizem iz grupe $\mathfrak{Q}_8$ v grupo obrnljivih elementov kolobarja $\mathscr{F}$.

e) (+ 7 točk) Pokaži, da je kolobar $\mathscr{F}$ izomorfen grupnemu kolobarju $\mathbb{Z}[\mathfrak{Q}_8]$.