Prvi izpit iz Algebre 2
Ljubljana, 14. junij 2005

1. Naj bo G grupa moči np, kjer je n naravno število, p praštevilo in $p > n$. Naj bo H podgrupa moči p v grupi G. Pokaži, da je H podgrupa edinka.

2. Naj bo K kolobar. Pokaži, da sta ekvivalentni naslednji trditvi.

   (a) Za vsak $a \in K$ velja, da iz $a^2 = 0$ sledi $a = 0$.

   (b) Kolobar K nima neničelnih nilpotentov.

3. (a) Če sta $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $0 \to C \to D \to E \to 0$ kratki ekstaktni zaporedji nekih K-modulov, potem lahko konstruiraš eksaktno zaporedje $0 \to A \to B \to D \to E \to 0$.

   (b) Vsako eksaktno zaporedje oblike $0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to 0$ se da konstruirati iz kratkih eksaktnih zaporedij s pomočjo postopka iz prejšnje točke.

4. Naj bo K obseg in $a, b, c, d \in K$. Pokaži, da je preslikava $\phi : K(x) \to K(x)$, definirana s predpisom $\phi(f(x)) = f(\frac{ax+b}{cx+d})$ element Galoisove grupe $\mathrm{Gal}(K(x)/K)$ natanko tedaj, ko je $ad - bc \neq 0$.