Drugi izpit iz Algebre 2
Ljubljana, 27. junij 2005

1. Naj bo G nekomutativna grupa moči p^3, kjer je p praštevilo. Pokaži, da je center grupe G enak njeni komutatorski podgrupi.

2. Naj bo $f : K \to L$ homomorfizem kolobarjev z enico.

   (a) Naj obstaja taka enota $u \in K$, da je $f(u)$ enota v L. Pokaži, da f slika enico kolobarja K v enico kolobarja L.

   (b) Ali iz tega, da je u enota v K že avtomatično sledi, da je $f(u)$ enota v L?

3. Naj bo K celostno polje. Če je M neki K-modul, potem s $T(M)$ označimo njegov torzijski podmodul, tj. $T(M) = \{x \in m; \exists 0 \neq \lambda \in K : \lambda m = 0\}$.

   (a) Če je $f : M \to K$ homomorfizem K-modulov, potem velja $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

   (b) Če je $0 \to M \to N \to L$ eksaktno zaporedje K-modulov, potem je eksaktno tudi zaporedje $0 \to T(M) \to T(N) \to T(L)$.

   (c) Ali se morda nujno ohranja tudi eksaktnost na desni strani?

4. Naj bo k obseg karakteristike $p \neq 0$ in K/k razširitev obsegov. Naj bo $u \in K$ algebraični element nad k. Pokaži, da obstaja tako število $n \geq 0$, da je element u^{p^n} separabilen nad obsegom k. (Namig: indukcija na stopnjo elementa u).