Vpisna številka:______________ Ime in priimek:__________________________________

IZPIT IZ ALGEBRE 2 (STAR PROGRAM)

17. junij 2009

(1) Naj bo G grupa moči p^n za neko praštevilo p in naravno število n. Naj za vse $x, y, z \in G \setminus \{e\}$ velja naslednja lastnost: če je $xy = yx$ in $yz = zy$, potem je tudi $xz = zx$. Pokaži, da je grupa G Abelova. Ali morda trditev velja celo za poljubno grupo G?.

(2) Naj bo K komutativen kolobar in $P \subseteq K$ praideal. Naj bo $L = \{\frac{a}{b}; a, b \in K, b \notin P\}$ (kjer je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ natanko tedaj, ko je $ad = bc$). Pokaži, da je L za običajno seštevanje in množenje ulomkov kolobar. Kaj je L^{-1}? Poišči kak maksimalni ideal v L.

(3) Naj M poljuben K-modul in N nek njegov podmodul. Ali vedno velja $M \simeq N \oplus M/N$? Kaj pa, če je faktorski modul M/N projektiven?

(4) Dan je polinom $f(x) \in k[x]$ in naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ vse njegove ničle, pri čemer velja $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Denimo, da za vsak $i \neq j$ obstaja tak $\varphi \in \text{Gal}\,(K/k)$, da je $\varphi(x_i) = x_j$. Pokaži, da je potem f nerazcepni polinom.