Izpit iz Algebre 2, 11. 5. 2012

1. Naj bosta G_1 in G_2 grupi in $H_i \triangleleft G_i$ podgrupi edinki za $i = 1, 2$. Pokaži: $H_1 \times H_2 = \{(h_1, h_2);\ h_i \in H_i\}$ je podgrupa edinka grupe $G_1 \times G_2$ in velja $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$.

2. Naj bo G grupa moči 585. Pokaži, da v njej obstaja podgrupa edinka moči 65. (Nasvet: najprej pokaži, da v G obstajata podgrupi edinki moči 5 in 13.)

3. Naj bo K komutativen kolobar z enoto, ki ima natanko 3 ideale: 0, I in K. Pokaži:

   (a) Vsak $a \in K \backslash I$ je obrnljiv v K.

   (b) Za vsaka dva $a, b \in I$ velja $ab = 0$.

4. Naj bo K cel kolobar z enoto in $f(X)$ polinom v $K[X]$. Pokaži: če je $f(X)$ obrnljiv v $K[X]$, potem je oblike $f(X) = a$ za nek obrnljiv $a \in K$. Poišči še protiprimer za primer, ko K ni cel (to je, poišči necel kolobar z enoto K in obrnljiv polinom $f(X) \in K[X]$, ki ni oblike $f(X) = a$).

5. Naj bo K podkolobar racionalnih števil z lihim imenovalcem, to je

$$K = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q};\ \frac{m}{n} \text{ okrajšani ulomek, } n \text{ lih}\}.$$

   Pokaži, da je K res podkolobar s standardnim seštevanjem in množenjem. Pokaži, da je (2) maksimalni ideal tega kolobarja.