Algebra 2, 2. izpit

6. maj 2014

1. naloga (25)

Naj bo $\mathsf{Z} = \{(a_n)_{n\geq 2} \mid a_n \in \mathbb{Z}_n\}$ množica vseh zaporedij s členi v kolobarjih $\mathbb{Z}_n$ za $n \geq 2$.
Množico Z opremiva z običajnima operacijama seštevanja $\oplus$ in množenja $\odot$ zaporedij po komponentah.
Torej $(a_n)_{n\geq 2} \oplus (b_n)_{n\geq 2} = (a_n + b_n)_{n\geq 2}$ in $(a_n)_{n\geq 2} \odot (b_n)_{n\geq 2} = (a_n \cdot b_n)_{n\geq 2}$ za zaporedji $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2} \in \mathsf{Z}$.

a) Pokaži, da je $(\mathsf{Z}, \oplus, \odot)$ kolobar z enoto.

b) Poišči obrnljive elemente kolobarja $(\mathsf{Z}, \oplus, \odot)$.

Opazujva še podmnožico $\mathsf{Z}_0 = \{(a_n)_{n\geq 2} \mid a_n \in \mathbb{Z}_n,\ \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N.\ a_n = \bar{0}\}$ množice Z.

c) Pokaži, da je $(\mathsf{Z}_0, \oplus, \odot)$ podkolobar kolobarja $(\mathsf{Z}, \oplus, \odot)$. Ali ima enoto?

d) Pokaži, da ima vsak element grupe $(\mathsf{Z}_0, \oplus)$ končen red.

e) Pokaži, da množice Z_0 ni mogoče opremiti z dodatno operacijo množenja $\otimes$, glede na katero bi bil $(\mathsf{Z}_0, \oplus, \otimes)$ kolobar *z enoto*.

2. naloga (25)

Opazujva matrični kolobar $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ nad končnim poljem moči 7 in naj bo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$ grupa obrnljivih matrik.
Definirajva preslikavo $\Upsilon\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7)$, $\Upsilon\colon (A, X) \mapsto AXA^{-1}$.

a) Pokaži, da je Υ delovanje grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$ na množici $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7)$.

b) Določi moč kolobarja $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ in grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$.

c) Poišči stabilizator matrike $\left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{smallmatrix}\right)$ in izračunaj moč njene orbite pri delovanju Υ.

d) Pokaži, da je množica $\mathsf{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & x \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{Z}_7 \right\}$ 7-podgrupa Sylowa grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$.

e) Pokaži, da poleg S obstaja še vsaj sedem 7-podgrup Sylowa grupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$.

f) Pokaži, da obstaja element $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_7)$, za katerega velja $\Upsilon(A, \mathsf{S}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ x & \bar{1} \end{smallmatrix}\right) \mid x \in \mathbb{Z}_7 \right\}$.

3. naloga (25)

Opazujva kolobar polinomov $\mathbb{Z}_6[X]$.

a) Pokaži, da $\mathbb{Z}_6[X]$ *ni* glavni kolobar.

b) Ali je $\langle X \rangle$ maksimalni ideal v $\mathbb{Z}_6[X]$? Ali je praideal?

c) Pokaži, da je polinom $6X^3 + 5X^2 + 25X + 20$ *nerazcepen* nad $\mathbb{Z}$ in *razcepen* nad $\mathbb{Z}_6$.

Opazujva še množico polinomov $\mathsf{D} = \{\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i X^i \mid a_i \in 2\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ v $\mathbb{Z}_6[X]$.

d) Pokaži, da D tvori ideal v $\mathbb{Z}_6[X]$.

e) Ali je D cel kolobar?

f) Pokaži, da kvocientni kolobar $\mathbb{Z}_6[X]/\mathsf{D}$ *ni* izomorfen kolobarju $\mathbb{Z}_3[X]$.

4. naloga (25)

Opazujva množico $\mathsf{F} = \{f\colon S_5 \to \mathbb{Z}_2\}$ vseh funkcij iz simetrične grupe S_5 v kolobar $\mathbb{Z}_2$.
Množico F opremiva z običajnima operacijama seštevanja $\oplus$ in množenja $\odot$ funkcij po točkah.
Torej $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ in $(f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ za funkciji $f, g \in \mathsf{F}$.
Naj bo še $\mathsf{H} = \{f\colon S_5 \to \mathbb{Z}_2 \mid \forall x, y \in S_5.\ f(xy) = f(x) + f(y)\}$.

a) Pokaži, da je $(\mathsf{F}, \oplus, \odot)$ kolobar z enoto in da je $(\mathsf{H}, \oplus)$ grupa.

b) Ali množica funkcij $\mathsf{A} = \{f\colon S_5 \to \mathbb{Z}_2 \mid \forall a \in A_5.\ f(a) = \bar{0}\}$ tvori ideal v $(\mathsf{F}, \oplus, \odot)$?

c) Pokaži $\mathsf{H} \subseteq \mathsf{A}$.

d) Sklepaj $|\mathsf{H}| = 2$.

e) Sklepaj, da je $(\mathsf{H}, \oplus, \odot)$ podkolobar v $(\mathsf{F}, \oplus, \odot)$. Ali je celo ideal?