Algebra 2
Ljubljana, 9. september 2004

1. Abelova grupa G je deljiva, če ima za vsako naravno število n in za vsak $y \in G$ enačba $nx = a$ rešitev $x \in G$. Pokaži:

   (a) Nobena končno generirana Abelova grupa ni deljiva.

   (b) Grupa $(\mathbb{Q}, +)$ je deljiva.

2. Naj bo K kolobar, $0 \neq x \in K$ tak element, da je xK minimalni desni ideal, $z \in K$ pa tak element, da je $1 + zt \in K^{-1}$ za vsak $t \in K$. Pokaži, da je $xz = 0$.

3. Naj bo F obseg in K kolobar 2×2 zgornje trikotnih matrik z elementi iz K. Naj bo $M = F \times F$ levi K-modul za običajno matrično množenje. Poišči vse endomorfizme K-modula M. (Nasvet: poišči generatorje modula M in poglej, kako se preslikajo s poljubnim endomorfizmom.)

4. Naj bo k obseg karakteristike $p > 0$. Naj bo $\sigma : k[x] \to k[x^p]$ taka preslikava, da je $\sigma|_k = id$ in $\sigma(x) = x^p$. Pokaži, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ preslikava σ^n monomorfizem in poišči $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{im}(\sigma^n)$.