Četrti izpit iz Algebre 2
Ljubljana, 19. september 2005

1. (a) Če je H podgrupa grupe G z indeksom 2, potem pokaži, da je $a^2 \in H$ za vsak $a \in G$.

   (b) S pomočjo točke (a) pokaži, da grupa A_4 nima podgrupe moči 6. (Namig: poišči vsaj 7 različnih kvadratov v A_4.)

2. Naj bosta m_1 in m_2 dve celi števili, ki si nista tuji. Pokaži, da obstajata taki celi števili a_1 in a_2, da sistem kongruenc

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1(m_1) \\ x &\equiv a_2(m_2) \end{aligned}$$

   nima rešitve.

3. Naj bo M modul in N prosti modul nad kolobarjem K in naj bo $f : M \to N$ surjektivni homomorfizem. Pokaži, da je modul N direktni sumand v modulu M.

4. Naj bo k obseg karakteristike različne od 2 in $f(x) \in k[x]$ polinom stopnje n z ničlami $u_1, \ldots, u_n$, ki ležijo v neki razširitvi obsega k. Naj bo $D = \prod_{i<j} (u_i - u_j)^2$. Pokaži, da je $D \in k$. (Namig: kam se D preslika s poljubnim avtomorfizmov iz Galoisove grupe polinoma f?)