Prvi kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 9. december 2005

1. Naj bo f tak surjektivni endomorfizem grupe G, da velja $\ker(f) = \ker(f^2)$. Pokaži, da je f izomorfizem.

2. Naj bo p liho praštevilo. Pokaži, da ima grupa avtomorfizmov diedrske grupe D_{2p} kvečjemu $p(p-1)$ elementov. (Nasvet: izračunaj najprej red poljubnega elementa iz D_{2p}.)

3. Naj bo $(G, +)$ končna Abelova grupa lihe moči. Pokaži, da je $\sum_{g \in G} g = 0$.

4. Naj bo G grupa moči 225 in H neka njena podgrupa moči 75. Pokaži, da je H podgrupa edinka grupe G. (Nasvet: delovanje grupe G z levo translacijo na množici G/H.)

5. (UM+TM) Naj bo G neka grupa moči 30 in $a \in G$ nek element reda 2. Definirajmo homomorfizem $f : G \longrightarrow S_{30}$ s predpisom $(f(g))(x) = gx$. Pokaži, da je $f(a)$ liha permutacija. Od tod sklepaj, da grupa G vsebuje neko podgrupo edinko moči 15. Končno pokaži še, da je G rešljiva grupa.

   (PM+RM) Na množici realnih števil definiramo operacijo $\circ$ s predpisom $a \circ b = \sqrt{a^2 + b^2}$. Preveri, da je $(\mathbb{R}, \circ)$ monoid. Ali je grupa?