Algebra 2, 1. kolokvij

3. december 2013

Doseči je mogoče $100+10$ točk. Odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Katere od spodnjih množic matrik tvorijo grupo glede na matrično množenje?

a) $\left\{\left[\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & 0\end{smallmatrix}\right] \mid b,c\in\mathbb{C},\ bc\neq 0\right\}$

b) $\left\{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c\end{smallmatrix}\right] \mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ac\neq b^2\right\}$

c) $\left\{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a\end{smallmatrix}\right] \mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a^2\neq bc\right\}$

d) $\left\{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right] \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=\pm 1\right\}$

2. naloga (25 točk)

Množica bijektivnih realnih funkcij $\mathscr{B}$ je grupa glede na operacijo komponiranja. (Tega dejstva ni potrebno dokazovati.) Kompozitum funkcij $f\circ g$, kjer sta $f,g\in\mathscr{B}$, krajše označimo z fg.

Naj bosta funkciji $\rho,\tau\in\mathscr{B}$ dani s predpisom $\rho\colon x\mapsto x+1$ in $\tau\colon x\mapsto -x$. Z D označimo podgrupo grupe $\mathscr{B}$, generirano z elementoma ρ in τ. Torej $D=\langle\rho,\tau\rangle$.

a) Izračunaj red elementa τ in pokaži, da ρ ni končnega reda.

b) Pokaži, da velja $\tau\rho^{-1}=\rho\tau$.

c) Pokaži, da lahko vsak element grupe D zapišemo v obliki $\tau^a\rho^b$ za neka $a,b\in\mathbb{Z}$.

d) Poišči vse elemente končnega reda v D. Ali tvorijo podgrupo grupe D?

e) Naj bo $N_n=\langle\rho^n\rangle$ za nek $n\geq 2$. Pokaži, da je N_n podgrupa edinka v D.

f) Kateri znani grupi je izomorfen kvocient D/N_n?

3. naloga (25 točk)

Opazujmo alternirajočo grupo A_4, ki permutira točke $\{1,2,3,4\}$, in njeno podgrupo $K=\langle(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4)\rangle$.

a) Nariši Cayleyjev graf $\mathscr{G}$ grupe A_4 glede na podmnožico $\{(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(2\,3\,4)\}$.

b) Na grafu $\mathscr{G}$ označi elemente grupe K. Pokaži, da je K izomorfna Kleinovi četverki.

c) Pokaži, da je K podgrupa edinka v A_4.

d) Na grafu $\mathscr{G}$ označi odseke K v A_4. Za vsakega od odsekov podaj enega predstavnika.

e) Kateri znani grupi je izomorfen kvocient A_4/K?

4. naloga (25 + 10 točk)

a) Pokaži, da nobena grupa moči $31\cdot 32$ ni enostavna.

b) Pokaži, da je vsaka grupa moči $661\cdot 992$ rešljiva. (Mimogrede, 661 je praštevilo.)

c) (+ 10 točk) Pokaži, da nobena grupa moči $330\cdot 661^{(661\cdot 661)!}\cdot 992$ ni enostavna.