ALGEBRA 2

1.kolokvij

14.11.2002

1. Pokaži, da je grupa vseh kompleksnih števil z absolutno vrednostjo 1 izomorfna faktorski grupi realnih števil (za seštevanje) po podgrupi celih števil.

2. Naj bo G grupa moči 520. Pokaži, da vsebuje pravo, netrivialno podgrupo edinko.

3. Naj bo G grupa, H abelova grupa in $f : G \longrightarrow H$ homomorfizem grup. Naj bo N neka podgrupa grupe G, ki vsebuje jedro homomorfizma f. Pokaži, da je N podgrupa edinka. Ali sklep velja tudi, če N ne vsebuje jedra homomorfizma f?

4. (UM+TM) Naj bosta H in K podgrupi končnega indeksa v grupi G. Pokaži:

   (a) Predpis $\phi : H/(H \cap K) \longrightarrow G/K$, definiran s $\phi(h(H \cap K)) = hK$ je injektivna preslikava.

   (b) Če je preslikava ϕ surjektivna, je $G = HK$.

   (c) Če sta si števili $[G : H]$ in $[G : K]$ tuji, potem je $G = HK$. (Nasvet: pokaži najprej, da velja $[G : H \cap K] = [G : H][G : K]$.)

   (PM+RM) Naj bo $\mathbf{R}^*$ množica vseh neničelnih realnih števil in naj bo operacija $\circ$ na množici $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ definirana s predpisom $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$. Pokaži, da je $(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}, \circ)$ grupa.

5. Naj bosta H in K rešljivi podgrupi grupe G in privzemimo, da je H podgrupa edinka. Pokaži, da je potem tudi podgrupa HK rešljiva.