Prvi kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 24. november 2004

1. Naj bo G grupa in H neka njena podgrupa praštevilskega indeksa. Pokaži, da za vsako tako podgrupo K grupe G, da je $H \subseteq K \subseteq G$, velja $K = H$ ali $K = G$.

2. Naj bo G končna grupa moči $p^r m$, kjer je p praštevilo, r naravno število, m pa naravno število, tuje proti p. Naj bo H taka podgrupa edinka grupe G, da je faktorska grupa G/H ciklična grupa moči m. Pokaži, da v grupi G obstaja element reda m. (Nasvet: pokaži najprej, da obstaja v G tak element g, da je $g^m \in H$.)

3. Naj bo P_n množica vseh takih $n \times n$ matrik z elementi iz množice $\{0, 1\}$, da je v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko ena enica. Pokaži, da je P_n za običajno matrično množenje grupa, izomorfna grupi S_n.

4. Naj bo H podgrupa indeksa n v grupi G. Naj grupa G deluje na množici G/H z levo translacijo, tj. naj bo $f : G \longrightarrow S(G/H)$ homomorfizem, definiran s predpisom $(f(g))(aH) = gaH$. Pokaži, da je jedro homomorfizma f enako množici $\bigcap_{x \in G} (xHx^{-1})$.

5. (UM+TM) Naj bo G končna grupa, P njena podgrupa Sylowa pri praštevilu p in H taka podgrupa edinka v G, da je $P \subseteq H$. Če je P podgrupa edinka v grupi H, potem pokaži, da je P podgrupa edinka tudi v grupi G.

   (PM+RM) Naj bosta dani matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Definirajmo množico $G = \{A^k B^l; k, l \in \mathbb{Z}\}$. Preveri, da je G Abelova grupa za običajno množenje matrik.