Drugi kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 7. februar 2003

1. Naj bo G abelova grupa moči p^n za neko praštevilo p in naravno število n. Naj bo X množica vseh elementov iz G, ki so največjega možnega reda. Pokaži, da množica X generira grupo G.

2. Naj bo F prosti objekt v kategoriji $\underline{Kat}$ nad množico X (skupaj s preslikavo $i : X \longrightarrow F$). Naj bo kategorija $\underline{Kat}$ takšna, da so vsi njeni objekti tudi množice. Definirajmo kategorijo $\underline{Kat_1}$ tako, da bodo njeni objekti natanko vse preslikave množic $f : X \longrightarrow A$, kjer je A poljuben objekt iz $\underline{Kat}$. Morfizem v $\underline{Kat_1}$ iz $f : X \longrightarrow A$ v $g : X \longrightarrow B$ pa naj bo tak morfizem $h : A \longrightarrow B$ kategorije $\underline{Kat}$, da velja $hf = g$. Preveri, da je $\underline{Kat_1}$ res kategorija in da je $i : X \longrightarrow F$ univerzalno odbijajoči objekt kategorije $\underline{Kat_1}$.

3. Naj bo K komutativni kolobar z enico, I pa tak ideal v K, da so vsi njegovi elementi nilpotenti. Če s $\pi : K \longrightarrow K/I$ označimo kanonični epimorfizem, potem pokaži, da je $x \in K$ enota natanko tedaj, ko je $\pi(x) \in K/I$ enota.

4. Naj bo n neko naravno število. Če je grupa enot kolobarja $\mathbf{Z}_n$ ciklična, potem pokaži, da premore $\phi(\phi(n))$ generatorjev. (Namig: koliko elementov ima grupa enot kolobarja $\mathbf{Z}_n$?)

5. (UM+TM)

   Naj bo K kolobar z enico in s karakteristiko n. Naj bo $a \in K$. Pokaži:

   (a) Predpisa $\phi_a(1) = 1$ in $\phi_a(x) = a$ enolično določata homomorfizem $\mathbf{Z}[x] \longrightarrow K$.

   (b) Kolobar, generiran z elementoma 1 in a, je komutativni podkolobar v K.

   (c) Če je kolobar K moči n, potem je izomorfen kolobarju $\mathbf{Z}_n$.

   (d) Če je kolobar K moči p^2, kjer je p praštevilo, potem je komutativen.

   (PM+RM)

   Če je I levi ideal kolobarja K, potem pokaži, da je množica $A(I) = \{k \in K; kx = 0 \text{ za vse } x \in I\}$ ideal v kolobarju K.