Algebra 2, 2. kolokvij

22. januar 2014

1. naloga (25 točk)

Za katere od spodnjih operacij $\odot$ na množici kompleksnih matrik je $(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}), +, \odot)$ kolobar?

a) $A \odot B = 20A + 14B$

b) $A \odot B = BA$

c) $A \odot B = A^2 B^2$

d) $A \odot B = AB - BA$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathscr{L}$ kolobar vseh $\mathbb{R}$-linearnih preslikav $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ glede na običajni operaciji seštevanja in komponiranja funkcij. Kompozitum funkcij $A \circ B$, kjer sta $A, B \in \mathscr{L}$, označiva krajše z AB.

Funkciji $\Xi, \Delta \in \mathscr{L}$ sta dani s predpisoma $\Xi\colon p(X) \mapsto Xp(X)$ [množenje z X] in $\Delta\colon p(X) \mapsto p(X)'$ [odvajanje po X]. Označiva $\mathscr{W} = \{\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} \Xi^i \Delta^j \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_{i,j} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathscr{L}$.

a) Pokaži, da velja $\Delta\Xi - \Xi\Delta = \mathrm{Id}$.

b) Pokaži, da za vsako naravno število i velja $\Delta^i \Xi = \Xi \Delta^i + i\Delta^{i-1}$.

c) Sklepaj, da je $\mathscr{W}$ podkolobar v $\mathscr{L}$.

d) Pokaži, da niti Ξ niti Δ ni obrnljiv element kolobarja $\mathscr{W}$.

e) Pokaži, da linearna preslikava, dana s predpisom $\sum_k a_k X^k \mapsto \sum_k a_k X^{k^2}$, ni element kolobarja $\mathscr{W}$.

3. naloga (25 točk)

V kolobarju polinomov $\mathbb{Z}[X]$ opazujva polinom $q(X) = X^4 - 60X^2 + 16$.

a) Pokaži, da je q nerazcepen nad $\mathbb{Z}$.
Naj bo p liho praštevilo. Element $a \in \mathbb{Z}_p^*$ je **kvadratni ostanek mod** p, če velja $a \equiv b^2 \pmod{p}$ za neko število b. Naj bo KOST_p množica vseh kvadratnih ostankov mod p.

b) Pokaži, da je KOST_p podgrupa grupe $\mathbb{Z}_p^*$ moči $(p-1)/2$.
Nasvet: Opazuj preslikavo $\mathbb{Z}_p^* \to \mathsf{KOST}_p$, $a \mapsto a^2$.

c) Pokaži, da je element $a \in \mathbb{Z}_p^*$ kvadratni ostanek mod p, če in samo če velja $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.
Nasvet: Opazuj polinom $X^{(p-1)/2} - 1$.

d) Pokaži, da je q razcepen nad $\mathbb{Z}_p$ za vsako praštevilo p.

4. naloga (25 + 10 točk)

Označiva $\omega = e^{2\pi i/3}$ in opazujva kolobar Eisensteinovih celih števil $\mathbb{Z}[\omega]$.

a) Pokaži, da za poljuben element $a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ velja $|a + b\omega|^2 = a^2 - ab + b^2$.

b) Pokaži, da je $\mathbb{Z}[\omega]$ glavni kolobar.

c) Poišči obrnljive elemente v $\mathbb{Z}[\omega]$. Katero znano grupo tvorijo za operacijo množenja?

d) Pokaži, da je število $1 + \omega$ nerazcepno v $\mathbb{Z}[\omega]$. Pokaži, da je število 7 razcepno v $\mathbb{Z}[\omega]$.

e) Pokaži, da so praštevila p, ki so kongruentna 2 (mod 3), nerazcepna v $\mathbb{Z}[\omega]$.

f) (+ 10 točk) Pokaži, da so praštevila p, ki so kongruentna 1 (mod 3), razcepna v $\mathbb{Z}[\omega]$.