

Tretji kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 8. april 2005

1. (UM+TM)

Naj bo M modul nad komutativnim kolobarjem K , $x \in K$ in $I = \text{ann}(x)$ tak ideal kolobarja K , da je maksimalen med vsemi anihilatorji neničelnih elementov iz K . Pokaži, da je I praideal.

(PM+RM)

Izrazi polinom $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ z osnovnimi simetričnimi polinomi.

2. Naj bo K končen komutativen obseg in naj bo $I = \{f(x) \in K[x]; f(a) = 0 \text{ za vsak } a \in K\}$. Pokaži, da je I glavni ideal kolobarja K .
3. Poišči vse nerazcepne polinome stopenj 2 in 4 v kolobarju $\mathbb{Z}_2[x]$.
4. Naj bo M množica vseh 2×3 matrik z elementi iz kolobarja \mathbb{Z}_{30} , ki jo na običajen način naredimo za modul nad kolobarjem \mathbb{Z}_{30} . Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in M$. Poišči maksimalno število linearno neodvisnih vrstic in maksimalno število linearno neodvisnih stolpcev matrike A .
5. Poišči vsa naravna števila $k > 1$, za katera lahko \mathbb{Z}_m naredimo za modul nad kolobarjem \mathbb{Z}_k in pokaži, da za vsak tak k velja $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_k) \simeq \mathbb{Z}_m$.