Tretji kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 25. marec 2004

1. Pokaži, da je faktorski kolobar $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ izomorfen obsegu kompleksnih števil.

2. Naj bo K komutativni kolobar z enico in definirajmo
$$L = \{(f(x), g(y)); f(0) = g(0)\} \subseteq K[x] \times K[y].$$
Pokaži, da je L kolobar, izomorfen faktorskemu kolobarju $K[x, y]/(xy)$.

3. Naj bo M levi K-modul, N_1 in N_2 pa neka njegova podmodula. Pokaži, da je množica $\{\lambda \in K; \lambda N_1 \subseteq N_2\}$ (dvostranski) ideal kolobarja K.

4. Naj bo K komutativni kolobar z enico, $P \subseteq K$ praideal in I neki glavni ideal kolobarja K, ki vsebuje praideal P. Pokaži, da sta si K/P in I/P izomorfna kot modula nad kolobarjem K/P. Ali sta si izomorfna tudi kot modula nad kolobarjem K?

5. (UM+TM)

   Naj bo K celostno polje in M tak levi K-modul, da je njegov torzijski podmodul $T(M) = \{m \in M; \exists \lambda \in K \backslash \{0\} : \lambda m = 0\}$ končno generiran. Pokaži, da je potem torzijski modul neničeln.

   (PM+RM)

   Pokaži, da je množica $M_n(\mathbb{Z})$ vseh $n \times n$ matrik s celoštevilskimi koeficienti prosti $\mathbb{Z}$-modul z bazo $\{E_{ij}; 1 \leq i, j \leq n\}$, kjer je E_{ij} matrika katere edini neničelni koeficient je 1 na mestu (i, j).