

Tretji kolokvij iz Algebre 2

Ljubljana, 27. marec 2006

1. (UM+TM)

Naj bo p liho praštevilo in n neko naravno število, tuje proti p . Pokaži, da obstaja tako naravno število m , da je $n \equiv m^2 \pmod{p}$ natanko tedaj, ko je $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

(Namig: \mathbb{Z}_p^{-1} je ciklična grupa moči $p - 1$.)

(PM+RM)

Izračunaj ostanek števila 2006^{100} pri deljenju s 125.

2. Naj bo K kolobar. Preslikavi $D : K \rightarrow K$ rečemo odvajanje, če za vse $a, b \in K$ velja $D(a + b) = D(a) + D(b)$ in $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Poišči vsa odvajanja v kolobarju \mathbb{Z} . Opiši še vsa odvajanja v kolobarju $\mathbb{Z}[x]$.

3. Naj bo p praštevilo. Koliko je vseh nerazcepnih kvadratnih polinomov v $\mathbb{Z}_p[x]$? (Nasvet: Preštej, koliko je takšnih, ki so razcepni.)

4. Naj bo I ideal v kolobarju $\mathbb{Z}[x]$, generiran z elementoma 2 in $x^4 + x + 1$. Pokaži, da je I maksimalni ideal.

5. Naj bo K komutativni kolobar z enico. Pokaži, sta si $K[x]$ in $xK[x]$ izomorfna kot modula nad kolobarjem K .