Četrti kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 15. maj 2003

1. Naj bodo $p_1, \ldots, p_n$ praštevila, $k_1, \ldots, k_n$ naravna števila in naj bo kolobar K izomorfen direktnemu produktu $\mathbf{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbf{Z}_{p_2^{k_2}} \times \ldots \mathbf{Z}_{p_n^{k_n}}$ (s seštevanjem in množenjem po komponentah). Naj bo T (distributivna) mreža vseh idempotentov kolobarja K, delno urejena z relacijo $\leq$, definirano z $e \leq f \iff e = ef$. Poišči njeno razsežnost.

2. Dan je polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ in naj bo u neka njegova ničla. Razvij element $(1+u)^{-1}$ po bazi razširitve obsegov $\mathbf{Q}(u)/\mathbf{Q}$.

3. Dan je polinom $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ in naj bo K njegov razpadni obseg. Izračunaj Galoisovi grupi $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2}))$ in $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2}i))$.

4. (UM+TM)

   Naj bo K obseg in $f(x), g(x) \in K[x]$ tuja si polinoma. Pokaži:

   (a) Če je z transcendentni element nad obsegom K, potem je polinom $\psi(y) = zg(y) - f(y) \in K(z)[y]$ nerazcepen.

   (b) $\frac{f(x)}{g(x)}$ je transcendentni element nad obsegom K.

   (c) Stopnja razširitve $[K(x) : K(\frac{f(x)}{g(x)})]$ je enaka maksimumu stopenj polinomov f in g.

   (PM+RM)

   Naj bo $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, i, \omega)$, kjer je ω primitivni tretji koren enote. Izračunaj stopnjo $[K : \mathbf{Q}]$ in poišči kako bazo te razširitve.

5. Naj bo K obseg in $f(x), g(x) \in K[x]$ tuja si polinoma. Definirajmo preslikavo $\phi : K(x) \longrightarrow K(x)$, s predpisom $\phi(\frac{p(x)}{q(x)}) = \frac{p(\frac{f(x)}{g(x)})}{q(\frac{f(x)}{g(x)})}$. Pokaži, da je ϕ homomorfizem kolobarjev. Pokaži, da je ϕ avtomorfizem natanko tedaj, ko je maksimum stopenj polinomov f in g enak 1. (Nasvet: pomagaj si z rezultatom iz naloge 4c.)