Četrti kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 13. maj 2004

1. Naj bo K celostno polje, F njegov obseg ulomkov in I neki ideal v K. Naj bodo $a_1, \ldots, a_n \in I$ in $b_1, \ldots, b_n \in F$ taki elementi, da velja $b_i I \subseteq K$ za vse i in $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 1$. Pokaži, da je I projektivni K-modul. (Nasvet: pokaži, da je zaporedje $0 \to I \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{\pi} K^n/I \to 0$ razcepno eksaktno, kjer je preslikava f definirana s predpisom $f(a) = (b_1 a, \ldots, b_n a)$, π pa je kanonična preslikava.)

2. Naj bo K komutativni kolobar z enico in M, N, L, P neki K-moduli. Če je zaporedje $0 \to M \to N \to L \to 0$ razcepno eksaktno, potem pokaži, da je tudi zaporedje $0 \to M \otimes_K P \to N \otimes_K P \to L \otimes_K P \to 0$ razcepno eksaktno.

3. Naj bo V končno razsežni vektorski prostor in M mreža vseh njegovih podprostorov. Naj bosta $V_1 \subseteq V_2 \in M$. Pokaži, da je potem $l(V_2) = l(V_1) + l(V_2/V_1)$, kjer z l označimo razsežnost (dolžino) mreže vseh podprostorov danega vektorskega prostora.

4. Naj bo $f(x) = x^3 - 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ in naj bo a neka ničla polinoma f. Pokaži, da je f minimalni polinom za a nad $\mathbb{Q}$. Poišči minimalni polinom za element $b = a^2 - 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (UM+TM)

   Dani naj bodo obsegi $K = \mathbb{Q}(x)$, $k = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{Q}(x^2)$ in $F = \mathbb{Q}(x^3)$. Izračunaj $E'' = \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K/E))$ in $F'' = \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(K/F))$.

   (PM+RM)

   Naj bo $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ in $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}})$. Izračunaj stopnje razširitev obsegov $[E : \mathbb{Q}], [F : \mathbb{Q}]$ in $[EF : \mathbb{Q}]$.