Četrti kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 13. maj 2005

1. Naj bosta M in N modula nad komutativnim kolobarjem K. Naj bo M prosti modul z bazo $\{x_j\}_{j\in J}$. Pokaži, da je
$$\mathrm{Hom}_K(M,N) \cong \bigoplus_{j\in J} N.$$

2. Naj bo K tak kolobar, da je vsak modul nad njim projektiven. Pokaži, da za vsak podmodul N poljubnega K-modula M obstaja tak K-modul L, da je $N \oplus L \cong M$.

3. Naj bo M in N mreži, $f : M \to N$ pa homomorfizem mrež. Naj M vsebuje 0 in 1. Množici $I \subseteq M$ rečemo *ideal*, če za vse $a, b \in I$ in vse $x \in M$ velja $a \cap b \in I$ in $a \cup x \in I$. Pokaži, da je množica $f^{-1}(\{c\})$ ideal v M natanko tedaj, ko je $f(c) = f(1)$.

4. Naj bo a neka ničla polinoma $x^3-6x^2+9x+3 \in \mathbb{Q}[x]$. Poišči bazo razširitve $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ in razvij po bazi element $\frac{1}{a+1} \in \mathbb{Q}(a)$.

5. (UM+TM)

   Obseg $\mathbb{Z}_5$ razširimo z vsemi ničlami polinoma $x^3 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Koliko elementov ima dobljeni obseg?

   (PM+RM)

   Izračunaj stopnjo in poišči bazo razširitve $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.