

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

## 4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 2

15. maj 2008

- (1) Pokaži, da je  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$  prosti modul nad kolobarjem  $\mathbb{Z}$  in poišči njegovo bazo. Kateri končno generirani abelovi grupi je izomorfen tenzorski produkt  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ ?
- (2) Izračunaj tenzorski produkt  $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ .
- (3) (UM+TM)  
Naj bo  $M$  mreža vseh idempotentov komutativnega kolobarja  $K$  (za operaciji  $e \cap f = ef$  in  $e \cup f = e + f - ef$ ). Pokaži, da sta ekvivalentni naslednji trditvi:  
(a) V mreži  $M$  obstaja veriga dolžine  $n$  od 0 do 1.  
(b) V mreži  $M$  obstajajo taki idempotenti  $e_1, \dots, e_n$ , da je  $e_1 \cup \dots \cup e_n = 1$  in  $e_i \cap e_j = 0$  za vse  $i \neq j$ .
- (PM+RM)  
Naj bo  $M$  mreža vseh idempotentov kolobarja  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  (s seštevanjem in množenjem po komponentah). Pokaži, da v  $M$  obstaja kaka veriga dolžine  $n$ .
- (4) Naj bo  $k$  obseg in  $a$  tak element neke njegove razširitve, da je  $[k(a) : k] = 2n + 1$  za neko naravno število  $n$ . Izračunaj stopnjo razširitve  $[k(a^2) : k]$ .
- (5) Naj bo  $a$  neka ničla polinoma  $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ . Poišči minimalni polinom za element  $a^2 + 1$  nad obsegom  $\mathbb{Z}_3$ .