Grupe

1. Naj bo $G = \{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$ in $H = \{\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ x \in \mathbb{R}\}$. Pokaži, da sta G in H grupi za matrično množenje.

2. Dani sta množici $A = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$ in $B = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4};\ a, b, c \in \mathbb{Q},\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$. Pokaži, da sta A in B grupi za operacijo množenja števil.

3. Napiši tabelo množenja za vse grupe moči 2 in 3.

4. Naj bo G grupa, v kateri velja $x^2 = e$ za vsak $x \in G$. Pokaži, da je G komutativna.

5. Diedrska grupa D_n je definirana kot podgrupa grupe S_n (za $n > 2$), generirana s permutacijama

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

torej je to množica $D_n = \{\pi^{i_1}\rho^{j_1} \dots \pi^{i_k}\rho^{j_k};\ i_t, j_t \in \mathbb{Z}\}$. Pokaži da lahko vsak element D_n enolično zapišemo kot $\pi^i\rho^j$, kjer je $i \in \{0, \dots, n-1\}$ in $j \in \{0, 1\}$. Od tod sklepaj, da je $|D_n| = 2n$.

6. Naj bosta $G_1, G_2 \leq G$ pravi podgrupi grupe G (to je, $G_1, G_2 \neq G$). Pokaži, da je $G_1 \cup G_2 \neq G$.

7. Opiši končno generirane podgrupe grupe $(\mathbb{Q}, +)$.