Vaje 4

1. Pokaži, da je podgrupa ciklične grupe vselej ciklična.
2. Naj bo H prava podgrupa grupe G. Pokaži, da je $\langle G \backslash H \rangle = G$.
3. Naj bo G grupa in $x \in G$. Red elementa $\mathrm{red}(x)$ je definiran kot najmanjše naravno število n z lastnostjo $x^n = e$. Če tako naravno število ne obstaja, je po definiciji $\mathrm{red}(x) = \infty$.

   Pokaži, da za poljubna $x, y \in G$ velja:

   (a) $\mathrm{red}(x^{-1}) = \mathrm{red}(x)$

   (b) $\mathrm{red}(xy) = \mathrm{red}(yx)$

   (c) $x^n = e \Rightarrow \mathrm{red}(x) | n$
4. Naj bo G Abelova grupa in $H = \{x \in G;\ \mathrm{red}(x) < \infty\}$ (množica vseh elementov končnega reda). Pokaži, da je H podgrupa v G.
5. Pokaži, da je grupa neskončna natanko tedaj, ko vsebuje neskončno različnih podgrup.
6. Naj bo G končna grupa in n naravno število, tuje proti moči $|G|$. Pokaži, da za vsak $x \in G$ obstaja $y \in G$, da je $y^n = x$.
7. Naj bosta r in s tuji si števili in $x \in G$ element reda rs. Pokaži, da obstajata enolično določena elementa $y, z \in G$ redov $\mathrm{red}(y) = r$ in $\mathrm{red}(z) = s$, za katera velja $yz = zy = x$.
8. Naj bodo $H \leq K \leq G$ grupe. Pokaži, da velja $[G : H] = [G : K][K : H]$ (tudi v primeru, ko je eden od indeksov neskončen).
9. Pokaži, da je vsaka podgrupa indeksa 2 podgrupa edinka.
10. Poišči podgrupe edinke v grupi S_3.
11. Naj bosta K, H podgrupi grupe G. Definiramo množico $HK = \{xy; x \in H, y \in K\} \subseteq G$. Pokaži:

    (a) Če je $H \triangleleft G$ ali $K \triangleleft G$, je $HK \leq G$.

    (b) Če je $H, K \triangleleft G$, je $HK \triangleleft G$.