

Vaje 6

1. Naj bo $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$ in $H = \text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in G \mid \det(A) = 1\}$. Pokaži, da je $H \triangleleft G$. Kateri znani grupi je izomorfna grupa G/H ?
2. Pokaži, da grupi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in \mathbb{Z} nista izomorfni.
3. Ali sta grupi $(\mathbb{R}, +)$ in $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ izomorfni? Kaj pa $(\mathbb{R}, +)$ in (\mathbb{R}^+, \cdot) ?
4. Naj bo $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ in $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; b \in \mathbb{R} \right\}$. Pokaži, da je $H \triangleleft G$. Kateri znani grupi je izomorfna grupa G/H ? Kateri znani grupi pa je izomorfna grupa H ?
5. Poišči homomorfne slike grupe \mathbb{Z}_{12} .
6. Naj bo G podgrupa S_n , ki vsebuje vsaj eno liho permutacijo. Pokaži, da v G obstaja podgrupa edinka indeksa 2.
7. Naj bo G grupa in $N \leq G$, $H \triangleleft G$ takšni podgrupi, da velja $N \cap H = 1$ in je G edina podgrupa G , ki vsebuje hkrati N in H . Pokaži, da je $G/H \cong N$.
8. Določi grupo avtomorfizmov grupe \mathbb{Z}_8 .