Vaje 9 – Kolobarji

1. Na množici $\mathbb{R}$ sta dani operaciji $\oplus, *$ s predpisoma $a \oplus b = a + b + 1$ in $a * b = a + b + ab$. Pokaži, da je $(\mathbb{R}, \oplus, *)$ kolobar. Ali je tudi obseg?

2. Množica $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je kolobar za operaciji $+$ in $\cdot$ po komponentah. Kaj so delitelji niča v tem kolobarju?

3. Naj bo K kolobar, v katerem velja $a^2 = a$ za vsak $a \in K$. Pokaži, da je K komutativen.

4. Naj bosta $m, n \geq 2$ tuji števili. Pokaži, da v $\mathbb{Z}_{mn}$ obstaja netrivialen idempotent (to je idempotent, različen od 0 in 1).

5. Pokaži, da je kolobar K brez nilpotentov natanko tedaj, ko velja $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ za vsak $x \in K$.

6. Naj bo K končen kolobar, v katerem obstajata a, ki ni levi delitelj niča, in b, ki ni desni delitelj niča. Pokaži, da je K kolobar z enico.

7. Naj bo K komutativen kolobar in $I \triangleleft K$. Definiramo množico rad $I = \{x \in K;\ \exists n : x^n \in I\}$. Pokaži, da je rad I ideal v K, ki vsebuje I. Izračunaj rad $n\mathbb{Z}$ v kolobarju $\mathbb{Z}$.

8. Naj bosta I, J leva ideala v kolobarju K. Definirajmo množico $I : J = \{x \in K,\ xa \in I\ \forall a \in J\}$. Pokaži, da je $I : J$ (dvostranski) ideal v K. Izračunaj $I : J$ za primer $K = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$, $J = n\mathbb{Z}$, kjer sta m, n naravni števili.

9. Naj bo K komutativen kolobar in $N = \{x \in K,\ x = 0 \text{ ali } x \text{ nilpotent}\}$. Pokaži, da je $N \triangleleft K$ in da kolobar K/N nima nilpotentov.

10. Naj bo $f : K_1 \to K_2$ homomorfizem kolobarjev. Denimo, da sta K_1, K_2 kolobarja z enico. Pokaži:

    (a) Če je f surjektiven, je $f(1) = 1$ (to je, f je unitalni homomorfizem).

    (b) Če f ni surjektiven, potem to ni nujno res.

11. Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{10}$.

12. Poišči vse homomorfizme kolobarjev $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

13. Ali je možno narediti Abelovo grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ za kolobar z netrivialnim množenjem?