Vaje 11

1. Pokaži, da je kolobar matrik $M_n(F)$ nad poljem F enostaven kolobar. (Nasvet: najprej pokaži, da vsak netrivialen ideal v $M_n(F)$ vsebuje neko elementarno matriko E_{ij}.)

2. Naj bo K kolobar s karakteristiko n. Pokaži, da lahko K vložimo v kolobar z enico s karakteristiko n.

3. Naj bosta K in L komutativna kolobarja in $f : K \to L$ surjektivni homomorfizem. Pokaži: če je K glavni kolobar, je tudi L glavni. Ali velja tudi obratno?

4. Pokaži, da $\mathbb{Z}[X]$ ni glavni kolobar.

5. Poišči vse pare $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, ki zadoščajo $1 + 2^x = y^2$.

6. Reši enačbo $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 9999$ v celih številih. (Nasvet: oglej si vsako od števil x_i^4 po modulu 16.)

7. Naj bodo x, y, z cela števila, za katera velja $6|x+y+z$ in $6|x^2+y^2+z^2$. Pokaži, da je $6|x^n + y^n + z^n$ za vsak n.

8. Poišči nerazcepne polinome stopenj 2 in 4 v kolobarju $\mathbb{Z}_2[X]$.

9. Poišči največji skupni delitelj polinomov $X^4 + X^3 + X + 2$ in $X^4 + 2$ v kolobarju $\mathbb{Z}_3[X]$.