2. izpit iz algebre 3

21. avgust 2012

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. Naj bo K kolobar z enico in M nek cikličen levi K-modul. Dokaži, da je M izomorfen modulu K/J, kjer je J neki levi ideal kolobarja K.

2. Naj bo

$$M = \{\frac{a}{2^k}; a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dokaži, da je Abelova grupa $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$ izomorfna $\mathbb{Z}_3$.

3. Naj bo $k \subseteq K$, kjer je k obseg, K pa komutativen cel kolobar, ki je končnorazsežen vektorski prostor nad k. Dokaži, da je K obseg.

4. (M+FM)

   (a) Naj bo K obseg ter $p, q, r, s \in K[x]$ taki polinomi, da velja

   $$\frac{r(\frac{p(x)}{q(x)})}{s(\frac{p(x)}{q(x)})} = x,$$

   pri čemer sta polinoma p in q tuja, prav tako polinoma r in s. Dokaži, da sta stopnji polinomov p in q največ 1.

   (b) Naj bo u transcendenten element nad obsegom K. Poišči vse avtomorfizme obsega $K(u)$, ki fiksirajo obseg K.

   (PM) Dokaži, da je polinom $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$ nerazcepen nad $\mathbb{Q}$ in poišči razpadni obseg tega polinoma.