

Algebra 3

Izpit 1. 7. 2013

Vsaka naloga je vredna 25 točk.

1. Naj bo $(R, +, \cdot)$ kolobar z enico. Definirajmo levi $R \times R$ -modul M , ki je kot grupa za seštevanje enak $(R, +)$, modulsko množenje pa je podano z $(\alpha, \beta)x = \alpha x$. Podobno definirajmo levi $R \times R$ -modul N , ki je kot grupa za seštevanje enak $(R, +)$, modulsko množenje pa je podano z $(\alpha, \beta)x = \beta x$.

(a) Dokaži, da je

$$M \oplus N \cong R \times R$$

(kot izomorfizem levih $R \times R$ -modulov). (10)

(b) Dokaži, da je modul M projektiven. (5)

(c) Določi grupo homomorfizmov $\text{Hom}_{R \times R}(M, N)$. (10)

2. Naj bo dan polinom $X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$ in naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$ neka ničla tega polinoma.

(a) Določi stopnjo razširitve $[\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$. (13)

(b) Razvij element $\frac{1}{\alpha + \sqrt{2}}$ po standardni bazi te razširitve. (12)

3. Naj bo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \sigma & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{\beta} & E & \longrightarrow & F \end{array}$$

komutativen diagram R -modulov z eksaktnima vrsticama, kjer je σ izomorfizem. Definirajmo preslikavo $f = \alpha \circ \sigma^{-1} \circ \beta : D \rightarrow C$.

(a) Dokaži, da je $\text{im}(f) = \ker(\varphi)$. (10)

(b) Dokaži, da je $\ker(f) = \text{im}(\psi)$. (10)

(c) Dokaži, da je $D/\text{im}(\psi) \cong \ker(\varphi)$. (5)

4. Naj bo F obseg, $p(X) \in F[X]$ polinom nad F in α nek algebraičen element nad F . Označimo z $F(p)$ razpadni obseg polinoma p nad F . Dokaži:

(a) Za vsak $\varphi \in \text{Gal}(F(p)(\alpha) : F(\alpha))$ velja $\varphi(F(p)) \subseteq F(p)$. (8)

(b) Predpis $\varphi \mapsto \varphi|_{F(p)}$ podaja monomorfizem grup

$$\text{Gal}(F(p)(\alpha) : F(\alpha)) \rightarrow \text{Gal}(F(p) : F). \quad (9)$$

(c) Če je minimalni polinom za α nad F nerazcepen nad $F(p)$, potem je ta predpis tudi izomorfizem. (8)