1. izpit iz algebre 3

15. junij 2012

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. (a) Naj bo K kolobar in M K-modul. Za vsak $x \in M$ definiramo $I_x = \{a \in K; ax = 0\}$. Dokaži, da je I_x levi ideal kolobarja K.
   (b) Naj bo $T(M)$ množica vseh tistih elementov $x \in M$, za katere je I_x neničeln. Če je K komutativen cel kolobar, dokaži, da je $T(M)$ podmodul modula M (pravimo mu *torzijski podmodul*).
   (c) S primerom pokaži, da $T(M)$ ni nujno podmodul v M, če ima K delitelje niča.

2. Naj bo K kolobar in

$$\begin{array}{rcccccccc} & A_1 & \xrightarrow{\varphi} & A_2 & \xrightarrow{\psi} & A_3 & \xrightarrow{\vartheta} & A_4 & \xrightarrow{\chi} & A_5 \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \alpha_4 \downarrow & & \alpha_5 \downarrow & \\ & B_1 & \xrightarrow{\varphi'} & B_2 & \xrightarrow{\psi'} & B_3 & \xrightarrow{\vartheta'} & B_4 & \xrightarrow{\chi'} & B_5 \end{array}$$

komutativen diagram K-modulov in modulskih homomorfizmov z eksaktnima vrsticama. Dokaži:

(a) Če je α_1 surjektiven in α_2, α_4 injektivna, potem je α_3 injektiven.

(b) Če je α_5 injektiven in α_2, α_4 surjektivna, potem je α_3 surjektiven.

3. Naj bo M modulska mreža z elementom 0 in naj $d(a)$ označuje dolžino najdaljše verige med elementoma 0 in a. Dokaži, da za poljubna elementa $x, y \in M$ velja

$$d(x \cup y) + d(x \cap y) = d(x) + d(y).$$

Na primeru mreže podgrup grupe A_4 pokaži, da zgornja enakost ne velja v mrežah, ki niso modulske.

4. (M+FM) Naj bo K obseg moči q in $f \in K[x]$ nerazcepen polinom, ki deli $x^{q^n} - x$. Dokaži, da stopnja polinoma f deli n.

   (Nasvet: Pomagaj si z obsegom moči q^n.)

   (PM) Naj bo K razpadni obseg polinoma $f(x) = x^4+2x^2-2 \in \mathbb{Q}[x]$. Poišči stopnjo razširitve obsega K nad obsegom racionalnih števil in kakšno bazo te razširitve.