4. izpit iz algebre 3

27. marec 2013

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. Naj bo R komutativen cel kolobar, I neničelni ideal v R in K obseg ulomkov kolobarja R. Naj bo

$$M = \{x \in K; ax \in R \,\text{za vsak}\, a \in I\}$$

in za vsak $x \in M$ naj bo $\psi(x)\colon I \to R$ preslikava, definirana s predpisom $\psi(x)(a) = ax$.

(a) Dokaži, da je M modul nad kolobarjem R (za običajno seštevanje in množenje v K), za vsak $x \in M$ pa je preslikava $\psi(x)$ homomorfizem R-modulov.

(b) Dokaži, da je preslikava $\psi\colon M \to \mathrm{Hom}_R(I, R)$, ki vsak $x \in M$ slika v $\psi(x)$, izomorfizem R-modulov.

2. Naj bo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & M & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{p} & L & \to 0 \\
 & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \mathrm{id}_L & \\
0 \to & M & \xrightarrow{j} & N' & \xrightarrow{q} & L & \to 0
\end{array}
$$

komutativen diagram K-modulov in homomorfizmov K-modulov z eksaktnima vrsticama, kjer je M enostaven K-modul. Dokaži:

(a) Če je f ničelni homomorfizem, potem je N' izomorfen $M \oplus L$.

(b) Če je f neničeln, potem je N' izomorfen N.
(Namig: Kakšen je f, če je neničeln?)

3. Naj bo L razširitev obsega K, $[L : K] = n$ in $\alpha \in L$. Naj bodo $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ taki avtomorfizmi obsega L, ki fiksirajo K, da za $i \neq j$ velja $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$. Dokaži, da je $L = K(\alpha)$.

4. (M+FM)

(a) Številu $\zeta \in \mathbb{C}$ pravimo primitivni n-ti koren enote, če je $\zeta^n = 1$ in $\zeta^m \neq 1$ za $m < n$. Poišči vse elemente Galoisove grupe $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$, kjer je ζ primitivni n-ti koren enote.

(b) Dokaži, da za vsak primitivni n-ti koren enote ζ velja $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, kjer je φ Eulerjeva funkcija.

(c) Ali lahko samo s šestilom in ravnilom konstruiramo pravilni 255-kotnik? Odgovor utemelji.

(PM) Dokaži, da kot ϑ lahko samo s šestilom in ravnilom razdelimo na 3 enake dele natanko takrat, ko je polinom $4x^3 - 3x - \cos\vartheta$ razcepen nad $\mathbb{Q}(\cos\vartheta)$.