3. izpit iz algebre 3

4. september 2012

1. Naj bo M enostaven levi K-modul, N poljuben levi K-modul, $f\colon M \to N$ in $g\colon N \to M$ pa neničelna homomorfizma levih K-modulov. Dokaži:

   (a) f je injektiven.

   (b) g je surjektiven.

   (c) $g \circ f$ je izomorfizem.

2. Naj bo n naravno število in m njegov delitelj. Dokaži, da je $m\mathbb{Z}_n$ projektiven $\mathbb{Z}_n$-modul natanko takrat, ko sta si števili m in $\frac{n}{m}$ tuji.

3. (M+FM) Naj bosta M in N leva K-modula in $M' \leq M$, $N' \leq N$ njuna podmodula. Dokaži, da je tenzorski produkt $M/M' \otimes_K N/N'$ izomorfen Abelovi grupi $(M \otimes_K N)/L$, kjer je L podgrupa $M \otimes_K N$, generirana z vsemi elementi oblike $x \otimes y'$ in $x' \otimes y$, kjer je $x \in M$, $x' \in M'$, $y \in N$ in $y' \in N'$.

   (PM) Čemu je izomorfen tenzorski produkt $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x]/(x^2+4)$?

4. Naj bo $p(x) = x^3 + x + 1$ in $q(x) = x^4 + x + 1$.

(a) Dokaži, da sta polinoma p in q nerazcepna nad $\mathbb{Q}$.

(b) Naj bo α neka ničla polinoma p. Ali je q razcepen nad $\mathbb{Q}(\alpha)$? Svoj odgovor utemelji.