1. kolokvij iz Algebre 3
26. 4. 2013

1. Naj bo M levi R-modul in N njegov podmodul. Definirajmo

$$K = \{(x, y) \in M \oplus M | \ x - y \in N\}.$$

   Pokaži, da je K podmodul modula $M \oplus M$ in da velja $K \cong M \oplus N$. (25 točk)

2. Naj bo F obseg in $\underline{\mathcal{C}}$ kategorija vseh končno razsežnih vektorskih prostorov nad F in linearnih preslikav med njimi.

   Pokaži, da nad množico X obstaja prost objekt v kategoriji $\underline{\mathcal{C}}$ natanko tedaj, ko je X končna množica. (25 točk)

3. Naj bo K levi R-modul in M, N takšna podmodula, da je $K = M + N$. Dokaži:

   (a) Če je $M^* = 0$ in $N^* = 0$, je tudi $K^* = 0$. (15 točk)

   (b) Če je $(M \cap N)^* = 0$, potem je $N^* \cong (K/M)^*$. (10 točk)

4. Naj bo $R = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kolobar zgornje trikotnih realnih matrik in naj bosta $M = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ in $N = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}\}$ leva R-modula za običajno matrično množenje.

   (a) Pokaži, da sta modula M in N projektivna. (15 točk)

   (b) Pokaži, da modul M/N ni projektiven. (10 točk)