# 1. kolokvij iz algebre 3

4. april 2014

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. Naj bo <u>Kat</u> kategorija, katere objekti so pari $(A, a)$, kjer je $A$ množica in $a \in A$, morfizmi med objektoma $(A, a)$ in $(B, b)$ pa so vse take preslikave $f\colon A \to B$, za katere je $f(a) = b$. Kaj je produkt objektov $(A, a)$ in $(B, b)$ v kategoriji <u>Kat</u>? Svoj odgovor utemelji.

2. Naj bo $K$ kolobar z enico in $I$ nek njegov desni ideal.

   (a) Na množici $Hom(K/I, K)$ vseh homomorfizmov desnih $K$-modulov iz $K/I$ v $K$ definiramo seštevanje in množenje z elementi kolobarja $K$ s predpisoma $(f+g)(x+I) = f(x+I)+g(x+I)$ in $(a \cdot f)(x+I) = af(x+I)$. Dokaži, da je $Hom(K/I, K)$ levi $K$-modul za ti dve operaciji.

   (b) Preslikava $\varphi\colon Hom(K/I, K) \to K$ je podana s predpisom $\varphi(f) = f(1+I)$. Dokaži, da je $\varphi$ injektiven homomorfizem levih $K$-modulov.

   (c) Dokaži, da je slika homomorfizma $\varphi$ enaka levemu anihilatorju ideala $I$, t.j. množici $\{a \in K; ax = 0 \,\text{za vse}\, x \in I\}$.

3. Naj bo $K$ kolobar z enico, $M$ levi $K$-modul in $I$ ideal kolobarja $K$.

   (a) Naj bo $IM$ množica vseh končnih vsot $\sum a_i x_i$, kjer je $a_i \in I$ in $x_i \in M$. Dokaži, da je $IM$ podmodul modula $M$ in da faktorski modul $M/IM$ postane levi $K/I$-modul, če definiramo množenje s predpisom $(a + I)(x + IM) = ax + IM$.

   (b) Naj bo $K$-modul $M$ projektiven. Dokaži, da je tudi $K/I$-modul $M/IM$ projektiven. Ali je $M/IM$ projektiven tudi kot $K$-modul?

4. (M+FM) Naj bodo $N, N', L, L'$ taki podmoduli modula $M$, da je $M = N \oplus L = N' \oplus L'$.

   (a) Če je $N \cap N' = \{0\}$, dokaži, da je $N'$ izomorfen nekemu podmodulu modula $L$.

   (b) Če je $N' \subseteq L$, dokaži, da obstaja tak podmodul $L''$ modula $M$, da je $N \oplus N' \oplus L'' = M$.

   (Nasvet: Pomagaj si z eksaktnimi zaporedji.)

   (PM) V $\mathbb{Z}$-modulu $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ naj bo $N$ podmodul, generiran z elementom $(1, 0)$, $N'$ pa podmodul, generiran z elementom $(9, 3)$. Dokaži, da je $N \cap N' = \{(0, 0)\}$ in poišči tak podmodul $L$ v $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{12}$, da bo $(N + N') \oplus L = \mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{12}$.