1. kolokvij iz algebre 3

13. april 2012

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. (M+FM) Naj bo R poljuben kolobar z enico. Dokaži, da obstaja funktor iz kategorije množic v kategorijo R-modulov, ki vsako množico preslika v prosti R-modul nad to množico. Vse korake utemelji.

   (PM) Grupa G je podana z generatorji in relacijami kot

   $$G = \langle a, b; a^3 = b^2 = (ab)^2 = (ba)^2 = 1 \rangle.$$

   Dokaži, da je grupa G izomorfna simetrični grupi S_3. (Nasvet: Najprej ugotovi, koliko elementov ima grupa G.)

2. Naj bo I desni ideal kolobarja R, M levi R-modul in

$$N = \{x \in M; ax = 0 \,\text{za vsak}\, a \in I\}.$$

(a) Dokaži, da je N podmodul modula M.

(b) Naj bo R komutativen kolobar in I glavni ideal. Dokaži, da je faktorski modul M/N izomorfen modulu IM.

3. Naj bo R kolobar, M levi R-modul in S množica vseh endomorfizmov modula M.

   (a) Dokaži, da je S kolobar z enico za kompozitum preslikav in seštevanje po točkah, M pa je levi S-modul, če definiramo množenje s predpisom $f \cdot x = f(x)$ (kjer je $f \in S$ in $x \in M$).

   (b) Naj bo R komutativen obseg in M končno generiran R-modul. Dokaži, da je potem M enostaven S-modul.

   (c) S primerom pokaži, da sklep iz prejšnje točke ne velja, če R ni obseg.

4. Naj bosta zaporedji levih R-modulov

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0 \quad \text{in} \quad 0 \to C \xrightarrow{j} D \xrightarrow{q} E \to 0$$

eksaktni. Dokaži, da je eksaktno tudi zaporedje

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j \circ p} D \xrightarrow{q} E \to 0.$$