2. kolokvij iz Algebre 3
7. 6. 2013

1. Naj bo α ničla polinoma $p(X) = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ v neki razširitvi obsega $\mathbb{Z}_5$.
   (a) Določi stopnjo razširitve $[\mathbb{Z}_5(\alpha) : \mathbb{Z}_5]$ in razvij elementa α^{-1} in $(\alpha+1)^{-1}$ po standardni bazi te razširitve.
   (b) Poišči minimalni polinom za element $\alpha^2 \in \mathbb{Z}_5(\alpha)$ nad obsegom $\mathbb{Z}_5$.

2. (a) Določi stopnjo razširitve $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$.
   (b) Poišči minimalni polinom za $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nad obsegom $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.
   (c) Poišči kak neničelni polinom nad $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, ki ima ničlo $\sqrt{2} + \sqrt{3} + i$.

3. (a) Določi Galoisovo grupo polinoma $p(X) = X^4 - 2$ nad obsegom $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
   (b) Poišči vse vmesne obsege med $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in razpadnim obsegom polinoma p.

4. Kolobar $\mathbb{Q}[X]$ je modul nad podkolobarjem $\mathbb{Z}[X]$. Pokaži, da je

$$\mathbb{Q}[X] \otimes_{\mathbb{Z}[X]} \mathbb{Q}[X] \cong \mathbb{Q}[X]$$

   (kot izomorfizem $\mathbb{Z}[X]$-modulov).