

2. kolokvij iz algebre 3

30. maj 2014

Ime in priimek:

Vpisna št.:

1. Naj bo L komutativen kolobar z enico in K nek njegov podkolobar z enico. Kateremu K -modulu je izomorfen tenzorski produkt $L \otimes_K K[x]$? Odgovor utemelji.

2. Dokaži, da je mreža M distributivna natanko takrat, ko za poljubne elemente $x, y, z, w \in M$ velja: Če je $x \cap y \leq w$ in $x \cap z \leq w$, potem je $x \cap (y \cup z) \leq w$.

3. (M+FM) Naj bo $k \subseteq K$ končna razširitev obsegov, $a \in K$ in $\varphi_a: K \rightarrow K$ k -linearna preslikava, definirana s predpisom $\varphi_a(x) = ax$. Dokaži:

- (a) Minimalni polinom za a nad obsegom k je enak minimalnemu polinomu preslikave φ_a .
- (b) Če je $K = k(a)$, potem je minimalni polinom za a nad obsegom k (do predznaka natančno) enak karakterističnemu polinomu preslikave φ_a .
- (c) Karakteristični polinom preslikave φ_a je vedno potenca minimalnega polinoma za a nad k (do predznaka natančno).
(Nasvet: Pokaži, da je matrika preslikave φ_a bločno diagonalna v neki bazi.)

(PM) Naj bo a neka ničla polinoma $x^3 + 2x - 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Poišči minimalni polinom za $a^2 + a$ nad obsegom \mathbb{Z}_3 . Vse korake utemelji.

4. Poišči razpadni obseg K polinoma $x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$, stopnjo razširitve K/\mathbb{Q} in Galoisovo grupo te razširitve. Vse korake utemelji.