Tretji kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 8. april 2005

1. (UM+TM)

   Naj bo M modul nad komutativnim kolobarjem K, $x \in K$ in $I = ann(x)$ tak ideal kolobarja K, da je maksimalen med vsemi anihilatorji neničelnih elementov iz K. Pokaži, da je I praideal.

   (PM+RM)

   Izrazi polinom $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ z osnovnimi simetričnimi polinomi.

2. Naj bo K končen komutativen obseg in naj bo $I = \{f(x) \in K[x]; f(a) = 0$ za vsak $a \in K\}$. Pokaži, da je I glavni ideal kolobarja K.

3. Poišči vse nerazcepne polinome stopenj 2 in 4 v kolobarju $\mathbb{Z}_2[x]$.

4. Naj bo M množica vseh 2×3 matrik z elementi iz kolobarja $\mathbb{Z}_{30}$, ki jo na običajen način naredimo za modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}_{30}$. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in M$. Poišči maksimalno število linearno neodvisnih vrstic in maksimalno število linearno neodvisnih stolpcev matrike A.

5. Poišči vsa naravna števila $k > 1$, za katera lahko $\mathbb{Z}_m$ naredimo za modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}_k$ in pokaži, da za vsak tak k velja $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_k) \simeq \mathbb{Z}_m$.