Tretji kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 27. marec 2006

1. (UM+TM)

   Naj bo p liho praštevilo in n neko naravno število, tuje proti p. Pokaži, da obstaja tako naravno število m, da je $n \equiv m^2 (\mathrm{mod}\ p)$ natanko tedaj, ko je $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.
   (Namig: $\mathbb{Z}_p^{-1}$ je ciklična grupa moči $p-1$.)

   (PM+RM)

   Izračunaj ostanek števila 2006^{100} pri deljenju s 125.

2. Naj bo K kolobar. Preslikavi $D : K \to K$ rečemo odvajanje, če za vse $a, b \in K$ velja $D(a+b) = D(a) + D(b)$ in $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. Poišči vsa odvajanja v kolobarju $\mathbb{Z}$. Opiši še vsa odvajanja v kolobarju $\mathbb{Z}[x]$.

3. Naj bo p praštevilo. Koliko je vseh nerazcepnih kvadratnih polinomov v $\mathbb{Z}_p[x]$? (Nasvet: Preštej, koliko je takšnih, ki so razcepni.)

4. Naj bo I ideal v kolobarju $\mathbb{Z}[x]$, generiran z elementoma 2 in $x^4 + x + 1$. Pokaži, da je I maksimalni ideal.

5. Naj bo K komutativni kolobar z enico. Pokaži, sta si $K[x]$ in $xK[x]$ izomorfna kot modula nad kolobarjem K.