Vpisna številka:_____ Ime in priimek:_____

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 2

25. marec 2008

(1) Poišči vse nerazcepne kubične polinome v kolobarju $\mathbb{Z}_2[x]$.

(2) Naj bo F (komutativni) obseg s p^k elementi in $f(x) = x^{p^k} - x \in F[x]$. Pokaži, da ima polinom $f(x)$ v obsegu F natanko p^k ničel.

(3) Pokaži, da je S^1 (enotska krožnica v kompleksni ravnini) prosti objekt v kategoriji množic nad intervalom $[0, 2\pi)$.

(4) Naj bo M levi modul nad kolobarjem K in $x \in M$. Za poljubno podmnožico $S \subseteq M$ definiramo $A(S) = \{\lambda \in K; \lambda s = 0 \text{ za vsak } s \in S\}$. Ali velja naslednji sklep: $A(Kx) = 0 \Rightarrow A(\{x\}) = 0$? (Nasvet: oglej si primer, ko je $K = M_n(\mathbb{R})$ in $x = E_{11}$.)

(5) (UM+TM)
Naj bo K celostno polje (tj. komutativni kolobar z enico, brez deliteljev niča). Pokaži, da veljata naslednji trditvi:
(a) Če sta I in J taka ideala v K, da je $K = I \oplus J$ (kot direktna vsota K-modulov), potem je $I = K$ ali $J = K$.
(b) K je obseg natanko tedaj, ko je vsak $K-$modul projektiven.

(PM+RM)
Utemelji, zakaj je vsak modul nad kolobarjem $\mathbb{R}$ projektiven. Ali lahko zapišeš $\mathbb{R}$ kot netrivialno direktno vsoto nekih $\mathbb{R}$-podmodulov I in J?