ALGEBRA 2

4.kolokvij

13.5.1999

1. Naj bo M modul nad komutativnim kolobarjem z enico K. Pokaži, da je $K-$modul $M \otimes_K K[x]$ izomorfen $K-$modulu $M[x]$ vseh polinomov s koeficienti iz modula M.

2. Naj bo p praštevilo, n pa naravno število. Poišči razsežnost mreže vseh podmodulov $\mathbf{Z}-$modula $\mathbf{Z}_{p^n}$. (Nasvet: premisli, kaj so ideali v kolobarju $\mathbf{Z}_{p^n}$.)

3. Naj bo a neka ničla polinoma $p(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbf{Z}_3[x]$ v neki razširitvi obsega $\mathbf{Z}_3$. Poišči minimalni polinom za element $b = 1 - a^2$ nad obsegom $\mathbf{Z}_3$.

4. Naj bo k komutativni obseg s karakteristiko $p \neq 0$ in $K = k(\sqrt[p]{x}, \sqrt[p]{y})$ za spremenljivki x in y. Izračunaj stopnjo razširitve $[K : k(x, y)]$.

   $t^p - x$

5. (UM+TM) Naj bo K celostno polje in $k \subseteq K$ obseg, pri čemer se enici v k in K ujemata. Če je K končno razsežen kot vektorski prostor nad k, potem pokaži, da je K obseg.

   (PM+RM) Naj bo u neka ničla polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3 \in \mathbf{Q}[x]$, v pa neka ničla polinoma $p(x) = x^5 + 2x + 2 \in \mathbf{Q}[x]$. Poišči stopnje naslednjih razširitev: $[\mathbf{Q}[u] : \mathbf{Q}]$, $[\mathbf{Q}[v] : \mathbf{Q}]$ in $[\mathbf{Q}[u+v] : \mathbf{Q}]$.

$\cancel{x \in K}$ $\quad x = \sum \alpha_i x_i$

$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}_{\text{ni CD}}$

$\cancel{x^{-1} = \sum \beta_i x_i}, \ \beta_i = ?$

$\cancel{1 = (\sum \beta_i x_i)(\sum \alpha_i x_i)}$

$x \in K$

$x \neq 0$: $\{x x_1, \dots, x x_m\}$ je baza. $\sum \gamma_i x x_i = 0 \Rightarrow x(\sum \gamma_i x_i) = 0$

$\Rightarrow \sum \gamma_i x_i = 0 \Rightarrow \gamma_i = 0$

$\Rightarrow 1 = \sum \delta_i x x_i = x(\sum \delta_i x_i)$