ALGEBRA 2

4.kolokvij

14.5.2002

1. Naj bo K celostno polje in M K-modul. Definiramo množico $T(M) = \{m \in M;$ obstaja tak neničelni $k \in K$, da je $km = 0\}$.

   (a) Pokaži, da je $T(M)$ podmodul modula M.

   (b) Če je $f : M \to N$ homomorfizem K-modulov, potem je $f(T(M)) \subseteq T(N)$.

   (c) Če je $0 \to M \to N \to L \to 0$ eksaktno zaporedje K-modulov, potem pokaži, da je tudi zaporedje $0 \to T(M) \to T(N) \to T(L)$ eksaktno, pri čemer so preslikave v tem zaporedju skrčitve zgornjih preslikav na dane podmodule.

2. (UM+TM) Naj bo K celostno polje in I neki ideal v K.

   (a) Pokaži, da je I prosti K-modul natanko tedaj, ko je I glavni ideal.

   (b) Ali je ideal $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$ prosti modul nad kolobarjem $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$?

   (PM+RM) Naj bo $f : K \longrightarrow L$ surjektivni homomorfizem kolobarjev in M neki L-modul. Pokaži, da je M K-modul za zunanje množenje definirano s $k \cdot m = f(k)m$. Če je M prosti L-modul, ali je potem M nujno tudi prosti K-modul?

3. Izračunaj tenzorski produkt $\mathbf{Q}[x]$-modulov $\mathbf{Q}(x) \otimes_{\mathbf{Q}[x]} \mathbf{Q}(x)$.

4. Naj bo a neko naravno število in množica $M_a = \{n \in \mathbf{N}; n$ deli $a\}$, skupaj z relacijo deljivosti, mreža.

   (a) Pokaži, da je mreža M_a distributivna.

   (b) Za kakšna naravna števila a je mreža M_a komplementirana?

5. Naj bo $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3 \in \mathbf{Q}[x]$ in a neka ničla polinoma p. Razvij element $(1 + a)^{-1}$ po bazi vektorskega prostora $\mathbf{Q}(a)$ nad obsegom $\mathbf{Q}$.

4) $m \mid a$

$\forall m \in M_a : \exists m' : v(m, m') = a$

$D(m, m') = 1$

$\Updownarrow$

$a = p_1^{k_1} \cdots p_e^{k_e}$ $\qquad k_1 = \dots = k_e = 1$