Četrti kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 15. maj 2003

$\{x \in K;\ f^2 x = 0\}$

$K = \bigoplus K_f$ — K_f AG — $x \in K_f,\ y \in K_g$ — $\begin{pmatrix} f^2, g^2 \text{ unveil} \\ xy \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_r^{a_r}}$

$\mathbb{Z}_{p^2}$ je ok. (1 2) $\mathbb{Z}_n$

1. Naj bodo $p_1, \ldots, p_n$ praštevila, $k_1, \ldots, k_n$ naravna števila in naj bo kolobar K izomorfen direktnemu produktu $\mathbf{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbf{Z}_{p_2^{k_2}} \times \ldots \mathbf{Z}_{p_n^{k_n}}$ (s seštevanjem in množenjem po komponentah). Naj bo T (distributivna) mreža vseh idempotentov kolobarja K, delno urejena z relacijo $\leq$, definirano z $e \leq f \iff e = ef$. Poišči njeno razsežnost.

2. Dan je polinom $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ in naj bo u neka njegova ničla. Razvij element $(1+u)^{-1}$ po bazi razširitve obsegov $\mathbf{Q}(u)/\mathbf{Q}$.

3. Dan je polinom $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ in naj bo K njegov razpadni obseg. Izračunaj Galoisovi grupi $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2}))$ in $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2}i))$.

4. (UM+TM)

Naj bo K obseg in $f(x), g(x) \in K[x]$ tuja si polinoma. Pokaži:

(a) Če je z transcendentni element nad obsegom $K(y)$ potem je polinom $\psi(y) = zg(y) - f(y) \in K(z)[y]$ nerazcepen. $K[z][y]$ .. pr. 1. st.

(b) $\frac{f(x)}{g(x)}$ je transcendentni element nad obsegom K. $a_n \left(\frac{f}{g}\right)^n + \ldots + a_0 = 0$

$a_n f^n + \ldots + a_0 g^n = 0$

(c) Stopnja razširitve $[K(x) : K(\frac{f(x)}{g(x)})]$ je enaka maksimumu stopenj polinomov f in g.

$\psi(x) = z\, g(x) - f(x) = 0$

(PM+RM)

Naj bo $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, i, \omega)$, kjer je ω primitivni tretji koren enote. Izračunaj stopnjo $[K : \mathbf{Q}]$ in poišči kako bazo te razširitve.

5. Naj bo K obseg in $f(x), g(x) \in K[x]$ tuja si polinoma. Definirajmo preslikavo $\phi : K(x) \longrightarrow K(x)$, s predpisom $\phi(\frac{p(x)}{q(x)}) = \frac{p(\frac{f(x)}{g(x)})}{q(\frac{f(x)}{g(x)})}$. Pokaži, da je ϕ homomorfizem kolobarjev. Pokaži, da je ϕ avtomorfizem natanko tedaj, ko je maksimum stopenj polinomov f in g enak 1. (Nasvet: pomagaj si z rezultatom iz naloge 4c.)

$\varphi : K(x) \longrightarrow K(z)$ je izomorfizem

$a(x) \longmapsto a(z)$

$K(z) \subseteq K(x)$

$K(z) = K(x) \iff \max(\partial f, \partial g) = 1$