**Četrti kolokvij iz Algebre 2**
**Ljubljana, 13. maj 2005**

1. Naj bosta $M$ in $N$ modula nad komutativnim kolobarjem $K$. Naj bo $M$ prosti modul z bazo $\{x_j\}_{j \in J}$. Pokaži, da je
$$\mathrm{Hom}_K(M, N) \cong \bigoplus_{j \in J} N.$$

2. Naj bo $K$ tak kolobar, da je vsak modul nad njim projektiven. Pokaži, da za vsak podmodul $N$ poljubnega $K$-modula $M$ obstaja tak $K$-modul $L$, da je $N \oplus L \cong M$.

3. Naj bo $M$ in $N$ mreži, $f : M \to N$ pa homomorfizem mrež. Naj $M$ vsebuje 0 in 1. Množici $I \subseteq M$ rečemo *ideal*, če za vse $a, b \in I$ in vse $x \in M$ velja $a \cap b \in I$ in $a \cup x \in I$. Pokaži, da je množica $f^{-1}(\{c\})$ ideal v $M$ natanko tedaj, ko je $\cancel{f(}c) = f(1)$. ($c \in \mathrm{im} f$)

4. Naj bo $a$ neka ničla polinoma $x^3 - 6x^2 + 9x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Poišči bazo razširitve $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ in razvij po bazi element $\frac{1}{a+1} \in \mathbb{Q}(a)$.

5. (UM+TM)

   Obseg $\mathbb{Z}_5$ razširimo z vsemi ničlami polinoma $x^3 + x - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Koliko elementov ima dobljeni obseg? ← Vsaka končna raz. je Gal.

   (PM+RM)

   Izračunaj stopnjo in poišči bazo razširitve $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

3) $\Rightarrow$: $c = f(1) \Rightarrow$ $a, b \in I$, $x \in M$

$a \cap b \in I$ $\quad f(a \cap b) = f(a) \cap f(b) = c \cap c = c$

$a \cup x \in I$ $\quad f(a) \cup f(x) = c \cup f(x) = f(1) \cup f(x) = f(1) = c$

$\Leftarrow$: $f(a) = c$
$f(a \cup x) = c \Rightarrow \forall x \quad \Rightarrow \quad c \cup f(x) = c \ \forall x$

če $c = f(y) \Rightarrow f(y \cup x) = f(y) \ \forall x \quad x = 1: \ f(1) = f(y) = c$