Četrti kolokvij iz Algebre 2
Ljubljana, 15. maj 2006

1. Naj bo $M = \{a+bi; a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv b(2)\}$. Pokaži, da je M prosti modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}[i]$.
2. Pokaži, da je vsak podmodul poljubnega projektivnega, končno generiranega $\mathbb{Z}$-modula projektivni modul. (Nasvet: Pokaži, da je vsak podmodul poljubnega prostega, končno generiranega $\mathbb{Z}$-modula prosti modul in od tod sklepaj, da trditev tudi za projektivne module.)
3. Naj bosta M in N modula nad komutativnim kolobarjem K in naj velja $M \otimes_K N = 0$. Pokaži, da velja naslednja trditev: če je K obseg, potem je bodisi $M = 0$, bodisi $N = 0$. Ali ta sklep velja tudi, če K ni obseg?
4. (UM+TM) Naj bosta p in q različni praštevili. Označimo z M mrežo vseh idempotentov v kolobarju $\mathbb{Z}_{pq}$ (za običajni operaciji). Izračunaj njeno dolžino.

   (PM+RM) Označimo z M mrežo vseh idempotentov v kolobarju $\mathbb{Z}_{15}$ (za običajni operaciji). Izračunaj njeno dolžino.
5. Naj bo $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Poišči minimalni polinom za $\alpha + \alpha^2$ nad obsegom racionalnih števil.