Vpisna številka:______________ Ime in priimek:________________________________

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 2

16. maj 2007

(1) Poišči vse homomorfizme $\mathbb{Z}$-modulov iz $\mathbb{Q}[x]$ v $\mathbb{Z}[x]$. (Nasvet: preveri, kam bi se s takim homomorfizmom slikali elementi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.)

(2) (UM+TM)
Naj bo K celostno polje in $a, b \in K \backslash \{0\}$. Naj obstajata taka elementa $u, v \in K$, da velja $ua + vb = 1$. Definirajmo K-modula $M = K/(Kab)$ in $N = Ka/(Kab)$. Pokaži, da obstaja tak K-modul L, da je $M \simeq N \oplus L$.

(PM+RM)
Naj bo M množica vseh polinomov stopnje kvečjemu 5 s celimi koeficienti. Ali je M projektivni modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}$? Ali je prost? Poišči bazo, če obstaja.

(3) Izračunaj naslednja tenzorska produkta:
(a) $\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$,
(b) $F_1 \otimes_{\mathbb{Z}} F_2$, kjer je F_1 obseg karakteristike 0 in F_2 obseg karakteristike $p \neq 0$.

(4) Naj bo p praštevilo, m in n pa naravni števili. Izračunaj dolžino mreže vseh podmodulov $\mathbb{Z}$-modula $\mathbb{Z}_{p^n} \oplus \mathbb{Z}_{p^m}$.
povsečna veriga dolžine $n+m$ $\forall$ elt v verigi je moči p^k, $k=0,1,\ldots,n+m$ $\Rightarrow$ krajše verige ni

(5) Naj bo $k = \mathbb{Z}_2$ in $K = \mathbb{Z}_2[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, kjer so α_1, α_2 in α_3 ničle polinoma $f(x) = x^3 + x^2 + 1 \in k[x]$. Poišči stopnjo in bazo razširitve $[K : k]$.

$6x + 9y = 0$

$6x + 12y = 0$

$\cancel{3x + 12y = 0}$